



基于子空间的指数和分解及在信道估计中的应用

武智炜, 王海泉, 李美慧, 张欣禹, 钱淘鑫

(杭州电子科技大学通信工程学院, 浙江 杭州 310018)

摘要: 指数和序列分解问题是一个经典的数学问题, Prony 方法和 Prony-Kung 方法是解决此问题的经典方法。用支撑子空间的观点仔细分析了 Prony-Kung 方法, 在此基础上, 理论证明了指数和序列分解问题可以归纳于支撑子空间的确定问题, 并对受噪声污染的指数和序列提出了具有低复杂度的 Lloyd-like 搜索支撑子空间的算法。最后, 把以上算法应用于毫米波信道估计, 仿真结果表明了此应用的有效性。

关键词: 指数和分解; Prony-Kung 方法; 支撑子空间; Lloyd-like 迭代; 毫米波信道

中图分类号: TN91

文献标志码: A

doi: 10.11959/j.issn.1000-0801.2023086

Decomposition of exponential sums based on subspace and its application in channel estimation

WU Zhiwei, WANG Haiquan, LI Meihui, ZHANG Xinyu, QIAN Taoxin

School of Communication Engineering, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China

Abstract: The problem of the decomposition of an exponential sum sequence is a classical mathematical problem. Prony method and Prony-Kung method are the classical methods to solve this problem. The Prony-Kung method was analyzed in detail from the point of view of support subspace. On this basis, it was proved theoretically that the problem of the decomposition of an exponential sum sequence could be reduced to the determination of the support subspace, and a Lloyd-like algorithm with low-complexity for searching the support subspace for contaminated exponential sum sequence by noised was proposed. Finally, the above algorithm was applied to estimate millimeter wave channel, and the simulation results show the effectiveness of this application.

Key words: decomposition of exponential sum, Prony-Kung method, support subspace, Lloyd-like iteration, millimeter wave channel

0 引言

指数和分解问题^[1-4]自诞生以来, 就一直受到学者们的关注, 而所谓的指数和分解问题是给定

一组由指数和形式生成的序列 $\mathbf{S}$, 求解出决定生成序列 $\mathbf{S}$ 的参数 $\{z_1, z_2, \dots, z_r\}$ 和 $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ 。因此, 指数和分解问题的本质是解一个特殊的方程组, 与一般方程组不同的是, 此方程组的系数矩阵

也是未知的。经典的 Prony^[5]方法的核心就是解这个矩阵方程, 而且它的求解也仅仅依赖于这 N 个序列数据, 因此, 单独用 Prony 方法解决指数和分解问题, 其得到的效果并不理想, 稳定性较弱^[6]。随之而来的改进方法是经典的 Prony-Kung^[7]方法, 它在 Prony 方法的基础上, 考虑这个特殊的序列 S 的内在结构, 并且利用了 Hankel 矩阵的特性, 但它在求解 $\{z_1, z_2, \dots, z_r\}$ 时, 解决的是一个广义特征值问题^[8], 因此, 如果给定的序列数据 S 被噪声数据污染, 利用 Prony-Kung 方法解决指数和分解问题并不是很完美。

综上所述, 有必要提出一种新的方法解决指数和分解问题。在研究学习 Prony-Kung 方法时, 发现可以用子空间的角度处理指数和分解问题, 进而可以充分利用序列 S 的内在结构, 最终将所需的复参数 $\{z_1, z_2, \dots, z_r\}$ 和复参数 $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ 求解出来。

1 指数和序列分解问题及处理方法

本节主要介绍指数和分解问题及相应的 Prony 和 Prony-Kung 方法。

1.1 指数和序列分解问题

所谓的指数和序列, 是指一个有限长的复数序列 $\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$, 由式 (1) 生成。

$$s_n = \sum_{i=1}^r c_i z_i^{n-1}, n=1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中, r 是一个正整数, $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ 和 $\{z_1, z_2, \dots, z_r\}$ 是两个固定的复数序列, 与变量 n 无关。

显然, 指数和序列表达式 (1) 可由式 (2) 表示。

$$s = Wc \quad (2)$$

其中,

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_r^{N-1} \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} \quad (3)$$

本文称矩阵 W 为范德蒙型矩阵。

指数和序列分解问题是指已知向量 s , 求解整数 r 、复数 $\{z_1, z_2, \dots, z_r\}$ 和复数 $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ 。

1.2 Prony 方法

Prony 方法是一种古老的、处理上述指数和序列分解问题的有效方法, 其基本的数学原理及步骤如下。

$q_r(z)$ 为 r 阶、首项系数为 1 的复多项式, 如式 (4) 所示。

$$q_r(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_r) \quad (4)$$

将式 (4) 展开可得:

$$q_r(z) = z^r + \gamma_{r-1}z^{r-1} + \gamma_{r-2}z^{r-2} + \cdots + \gamma_1z + \gamma_0 \quad (5)$$

其中, $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{r-1}$ 为与 $z_1, z_2, \dots, z_r$ 相关的复常数。

对于式 (5) 中的 $q_r(z)$, 记 $\gamma_r = 1$, 则容易推得, $\forall m=1, 2, \dots, r$, 且对于整数 t , $0 \leq t \leq N-r$, 均有:

$$\sum_{m=0}^r \gamma_m s_{m+t} = s_t q_r(z_m) = 0 \quad (6)$$

即:

$$\sum_{m=0}^{r-1} \gamma_m s_{m+t} = -s_{t+r}, 0 \leq t \leq N-r \quad (7)$$

式 (7) 可用矩阵方程表示:

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_r \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N-r} & s_{N-r+1} & \cdots & s_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{r-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} s_{r+1} \\ s_{r+2} \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix} \quad (8)$$

由此可知, 方程组式 (8) 中, 如果系数矩阵的行数大于或等于 r 且满秩, 则可求得系数 $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{r-1}$ 。再解多项式方程 (5), 则可得到 $z_1, z_2, \dots, z_r$, 从而再由方程 (2) 求得 $c_1, c_2, \dots, c_r$, 这就是 Prony 方法的基本思想。

1.3 Prony-Kung 方法

在上述 Prony 方法中, 求解系数 $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{r-1}$ 的准确性依赖于系数矩阵, 从而用 Prony 方法单独解决指数和序列的分解问题稳定性较弱, 由此



产生了以下改进的 Prony 方法, 即 Prony-Kung 方法。具体细节如下。

取正整数 Q 和 L , 使 $Q + L = N + 1$ 。利用指数和序列 $\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ 做如下的 $Q \times L$ 维矩阵。

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_L \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_Q & s_{Q+1} & \cdots & s_N \end{bmatrix} \quad (9)$$

显然, 矩阵 $\mathbf{H}$ 为 Hankel 型矩阵。经过简单计算可得:

$$\mathbf{H} = \mathbf{W}_Q \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_r) \mathbf{W}_L^T \quad (10)$$

其中, $\mathbf{W}_Q$ 和 $\mathbf{W}_L$ 是范德蒙型矩阵(如式(3)所示), 它们的大小分别为 $Q \times r$ 和 $L \times r$ 。

Prony-Kung 方法的步骤如下。

步骤 1 计算 Hankel 矩阵 $\mathbf{H}$ 的 SVD: $\mathbf{H} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^H$ 。

步骤 2 取矩阵 $\mathbf{U}$ 的 $1 \sim Q-1$ 行、 $1 \sim r$ 列为矩阵 $\mathbf{U}_1$, 取矩阵 $\mathbf{U}$ 的 $2 \sim Q$ 行、 $1 \sim r$ 列为矩阵 $\mathbf{U}_2$ 。

步骤 3 解广义特征值问题 $\mathbf{U}_2 \mathbf{v} = \lambda \mathbf{U}_1 \mathbf{v}$, 记广义特征值为 $z_1, z_2, \dots, z_r$ 。

步骤 4 根据 $z_1, z_2, \dots, z_r$, 求解方程(2), 得到 $c_1, c_2, \dots, c_r$ 。

2 Prony-Kung 方法的几何解释及迭代算法

在本节及后文中, 假设 $z_i = e^{j\theta_i}, i = 1, 2, \dots, r$ 。

2.1 Prony-Kung 方法的几何解释

对于指数和序列 $\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$, 从式(2)可知, 序列组成的列向量 $[s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_N]^T$ 处在由向量 $\alpha_N(\theta_1), \alpha_N(\theta_2), \dots, \alpha_N(\theta_r)$ 所张成的子空间中, 且 $\alpha_N(\theta)$ 为一个导向矢量, 如式(11)所示。

$$\alpha_N(\theta) = [1 \ e^{j\theta} \ \cdots \ e^{j(N-1)\theta}]^T \quad (11)$$

本文称由多个导向矢量所生成的子空间为支

撑子空间。

定义 1 在复欧几里得空间 $\mathbb{C}^N$ 中, 称向量 $\alpha_N(\theta)$ 为导向矢量。如果一个子空间中存在一组导向矢量作为此子空间的基, 则称此子空间为一个支撑子空间。记所有支撑子空间组成的集合为 A 。

显然, 空间 $\mathbb{C}^N$ 是一个支撑子空间, 因为离散傅里叶矩阵的每一列是一个导向向量, 且这些导向向量组成 $\mathbb{C}^N$ 的一组基。

利用以上术语, 指数和序列的分解问题可以描述为: 已知支撑子空间中的一个向量 $\mathbf{s} = [s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_N]^T$, 求解支撑子空间的维数 r 、生成此子空间的参数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ 和向量 $\mathbf{s}$ 在基 $\{\alpha_N(\theta_1), \alpha_N(\theta_2), \dots, \alpha_N(\theta_r)\}$ 下表示的系数 $c_1, c_2, \dots, c_r$ 。

从第 1 节中的 Prony 方法和 Prony-Kung 方法可以做出如下几何解释。

定理 1 假设已知支撑子空间的维数为 r 。如果 $N > 2r$, 则支撑子空间中的任何一个向量 $\mathbf{v}$, 只要此向量在基 $\{\alpha_N(\theta_1), \alpha_N(\theta_2), \dots, \alpha_N(\theta_r)\}$ 下的表示系数均不为 0, 则从向量 $\mathbf{v}$ 可求得参数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ 和相应的表示系数。

证明: 不妨令 $\mathbf{v} = c_1 \cdot \alpha_N(\theta_1) + c_2 \cdot \alpha_N(\theta_2) + \cdots + c_r \cdot \alpha_N(\theta_r)$, 则向量 $\mathbf{v}$ 为 N 维复向量。再令 $Q = \frac{N}{2} + 1$, $L = N + 1 - Q$, 其中, $\lceil a \rceil$ 表示大于或等于 a 的最小整数。由向量 $\mathbf{v}$ 构造出一个 $Q \times L$ 维的 Hankel 矩阵 $\mathbf{H}$ (具体可见式(9)), 则经过简单计算, 可得:

$$\mathbf{H} = \mathbf{W}_Q \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_r) \mathbf{W}_L^T \quad (12)$$

其中, $\mathbf{W}_Q$ 是由 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ 决定的范德蒙型 $Q \times r$ 维矩阵, 而 $\mathbf{W}_L$ 是由 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ 决定的范德蒙型 $L \times r$ 维矩阵, 如式(3)所示。

由上述分解式可知, $\mathbf{H}$ 的列向量所生成的空间与 $\mathbf{W}_Q$ 的列向量所生成的空间一致。因此, $\mathbf{H}$ 的

列向量所生成的空间是一个支撑子空间。对 $\mathbf{H}$ 做奇异值分解, 得:

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^H \quad (13)$$

则 $\mathbf{U}$ 的列向量是 $\mathbf{H}$ 的列向量所生成的空间的一组标准正交基, 对矩阵 $\mathbf{U}$ 实施第 1 节所述的 Prony-Kung 方法的步骤 2~步骤 4, 即可得到 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ 和 $c_1, c_2, \dots, c_r$ 。

证毕。

由此定理的结论可知: 一个指数和序列对应于唯一一个支撑子空间; 给定支撑子空间的任何一个向量 (只要其导向矢量的系数均不为 0), 即可恢复或决定此支撑子空间。

2.2 基于支撑子空间的 Lloyd-like 迭代算法

第 1 节中介绍的 Prony 方法与 Prony-Kung 方法, 在整数 r 已知、 $N \geq 2r+1$ 的条件下, 能够准确地解出 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ 和 $c_1, c_2, \dots, c_r$ 。但在有噪声的情况下, 带来的误差较大, 且算法不太稳定^[6]。

从第 2.1 节的内容可知, 指数和序列分解问题的关键是要找到此序列的支撑子空间。当此序列被噪声污染时, 其相应的支撑子空间也被污染, 这样就有必要设计一个算法, 利用污染的数据逼近支撑子空间。具体如下。

定义如式 (14) 所示的 $N \times r$ 维矩阵。

$$\mathbf{A}_{N \times r} = [\alpha_N(\theta_1), \alpha_N(\theta_2), \dots, \alpha_N(\theta_r)] \quad (14)$$

$$\min_{-\pi \leq \theta_r \leq \pi} \left(\min_{-\pi \leq \theta_{r-1} \leq \pi} \left(\dots \left(\min_{-\pi \leq \theta_1 \leq \pi} \|\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{A}_{N \times r} (\mathbf{A}_{N \times r}^H \mathbf{A}_{N \times r})^{-1} \mathbf{A}_{N \times r}^H \hat{\mathbf{s}}_2\| \right) \right) \right) \quad (17)$$

从而, 搜索的复杂度可以从指数级增长降为线性增长。因此, 当 N 较大时, 可以用如算法 1 所示的基于支撑子空间的 Lloyd-like 迭代算法, 其主要思想是先随机地选取 r 个角度值, 依次固定 $r-1$ 个角度, 搜索求解出剩下的角度的最优值并固定, 即当求解 $\hat{\theta}_i, i=1, 2, \dots, r$ 时, 固定剩下的 $r-1$ 个角度, 最终经过循环迭代得到所求解的 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r$ 。

则被噪声污染的指数和序列 $\hat{\mathbf{s}} = [\hat{s}_1 \ \hat{s}_2 \ \dots \ \hat{s}_N]^T$ 可表示为:

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{A}_{N \times r} \mathbf{c} + \mathbf{w} \quad (15)$$

其中, $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_r]^T$, 矩阵 $\mathbf{w}$ 为一个 $N \times 1$ 维的噪声矩阵, 其每个元素相互独立, 且均服从均值为 0、方差为 σ^2 的复高斯分布。这样, 所要解决的问题如下。

P1: 已知向量 $\hat{\mathbf{s}}$, 求解 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ 和 $c_1, c_2, \dots, c_r$ 。

由第 2.1 节的定理 1 可知, 只要求出 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ 所对应的支撑子空间, 就可以求出 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ 和 $c_1, c_2, \dots, c_r$ 。因而, 问题 P1 可以转化为: 求一个支撑子空间, 使得 $\hat{\mathbf{s}}$ 在此支撑子空间的投影达到最大。其数学表达式如下。

$$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r) = \underset{-\pi \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_r \leq \pi}{\operatorname{argmin}} \quad \parallel \quad (16)$$

$$\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{A}_{N \times r} (\mathbf{A}_{N \times r}^H \mathbf{A}_{N \times r})^{-1} \mathbf{A}_{N \times r}^H \hat{\mathbf{s}}_2$$

其中, $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r$ 为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ 的估计值, $\mathbf{A}_{N \times r} (\mathbf{A}_{N \times r}^H \mathbf{A}_{N \times r})^{-1} \mathbf{A}_{N \times r}^H \hat{\mathbf{s}}$ 是向量 $\hat{\mathbf{s}}$ 在支撑子空间中的投影。

对于上述优化问题式 (16), 如果采用全搜索方法, 则其复杂度极高, 且随着 r 增加呈指数级增长。但是, 随着 N 增大, 矩阵 $\mathbf{A}_{N \times r}$ 中的列向量逐渐趋于正交, 则式 (16) 的最小值优化问题可以用式 (17) 的优化问题近似。

算法 1 基于支撑子空间的 Lloyd-like 迭代算法

输入 初始 $\hat{\theta}_1^{(0)}, \hat{\theta}_2^{(0)}, \dots, \hat{\theta}_r^{(0)} \in (-\pi, \pi)$, 设置迭代次数 k 、阈值

步骤 1 $\hat{\theta}_1^{(1)} = \underset{\theta_1, \theta_2 = \hat{\theta}_2^{(0)}, \dots, \theta_r = \hat{\theta}_r^{(0)}}{\operatorname{argmin}} \parallel \hat{\mathbf{s}} - \mathbf{A}_{N \times r} (\mathbf{A}_{N \times r}^H \mathbf{A}_{N \times r})^{-1} \mathbf{A}_{N \times r}^H \hat{\mathbf{s}}_2 \parallel$

步骤 2 固定 $\hat{\theta}_1^{(1)}, \hat{\theta}_3^{(0)}, \dots, \hat{\theta}_r^{(0)}$, 以步骤 1 中求解 $\hat{\theta}_1^{(1)}$ 的方式, 同理可以求得 $\hat{\theta}_2^{(1)}$, 重复以上



步骤, 直至得到一组 $\hat{\theta}_1^{(1)}, \hat{\theta}_2^{(1)}, \dots, \hat{\theta}_r^{(1)}$, 为迭代一次, 并记录此时的 $\|\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{A}_{N \times r}(\mathbf{A}_{N \times r}^H \mathbf{A}_{N \times r})^{-1} \mathbf{A}_{N \times r}^H \hat{\mathbf{s}}\|$ 值, 记为 ϱ_1 。

步骤 3 重复步骤 1 和步骤 2, 得到 $\hat{\theta}_1^{(2)}, \hat{\theta}_2^{(2)}, \dots, \hat{\theta}_r^{(2)}$, 为迭代两次, 并记录此时的 $\|\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{A}_{N \times r}(\mathbf{A}_{N \times r}^H \mathbf{A}_{N \times r})^{-1} \mathbf{A}_{N \times r}^H \hat{\mathbf{s}}\|$ 值, 记为 ϱ_2 。

步骤 4 重复步骤 3, 当迭代次数 i 达到设定的 k 或 $|\varrho_i - \varrho_{i+1}| < \Delta, 1 \leq i \leq k-1$ 时, 迭代结束, 得到的 $\hat{\theta}_1^{(i)}, \hat{\theta}_2^{(i)}, \dots, \hat{\theta}_r^{(i)}$ 即所求项。

步骤 5 令 $\mathbf{c} = (\mathbf{A}_{N \times r}^H \mathbf{A}_{N \times r})^{-1} \mathbf{A}_{N \times r}^H \hat{\mathbf{s}}$ 求出指数和序列系数。

步骤 6 输出 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1^{(i)}, \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2^{(i)}, \dots, \hat{\theta}_r = \hat{\theta}_r^{(i)}$, $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_r]^T$ 。

从第 3 节的仿真可知, 一般情况下, 上述迭代仅需要迭代 2 次或 3 次, 算法即可终止。

注意到以上算法很大程度上不同于基于正交匹配追踪 (orthogonal matching pursuit, OMP) [9] 技巧的算法, 在 OMP 算法中, 迭代逼近基于向量的相关性, 而上述算法基于增大支撑子空间上的投影。

3 大规模多输入多输出系统下毫米波信道信息的估计及仿真

在前几节中, 对指数和序列的分解问题做了详细探讨, 以子空间的角度探究指数和序列的分解问题。在此基础上, 得到了定理 1 并提出了基于支撑子空间的 Lloyd-like 迭代算法。事实上, 在无线通信领域中, 获取毫米波信道^[10]信息的本质就是解决指数和序列的分解问题。因此, 第 2.2 节中所提出的基于支撑子空间的 Lloyd-like 迭代算法可以应用于恢复无线信道信息。

3.1 无线通信信道模型和信道估计问题

假设通信系统中的发射天线数为 1 根, 接收天线为 N 根, 天线采用均匀线性阵列 (uniform linear array, ULA) 的排列方式, 且假设系统在毫米波环境下运行, 信道记为 $\mathbf{h}$, 其为一个 N 维向

量。采用经典的 Saleh-Valenzuela 信道模型^[11-12], 可以表示为:

$$\mathbf{h} = \sum_{l=1}^r \beta_l \boldsymbol{\alpha}(\theta_l) \quad (18)$$

其中, r 为路径数, β_l 表示第 l 条路径的信道复增益系数; $\boldsymbol{\alpha}(\theta_l)$ 表示第 l 条路径的信道导向矢量, 可以表示为:

$$\boldsymbol{\alpha}(\theta_l) = [1 \ e^{j\theta_l} \ \dots \ e^{j(N-1)\theta_l}]^T \quad (19)$$

其中, θ_l 值与第 l 条路径的方位到达角相关。

为了获取信道 $\mathbf{h}$, 发送方发送事先设计好的信号, 不妨记为 1, 这样接收方接收到的信号记为 $\mathbf{Y}$, 为一个 N 维向量, 可以表示为:

$$\mathbf{Y} = \sqrt{\rho} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{w} \quad (20)$$

其中, ρ 为接收到的信噪比 (SNR), N 维向量 $\mathbf{w}$ 为噪声, 服从均值为 0、方差为 1 的复高斯分布。信道估计的任务就是要从 $\mathbf{Y}$ 中估计出参数 r 、 β_l 与 $\theta_l (l=1, 2, \dots, r)$ 。

利用式 (20) 和迫零 (zero forcing, ZF) 响应^[13]信道估计方法, 可以得到 $\mathbf{h}$ 的 ZF 估计值, 记为 $\mathbf{h}_{ZF}$, 其估计表达式为:

$$\mathbf{h}_{ZF} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \mathbf{Y} = \sum_{l=1}^r \beta_l \boldsymbol{\alpha}(\theta_l) + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \mathbf{w} \quad (21)$$

这样, 先前所述的信道参数估计问题可以表述如下。

P2: 已知向量 $\mathbf{h}_{ZF}$, 估计参数 r , β_l 与 $\theta_l (l=1, 2, \dots, r)$

显然, 从式 (21) 可知, 如果忽略噪声项 $\frac{1}{\sqrt{\rho}} \mathbf{w}$, 则上述估计问题 P2 就是第 1 节所述的指数和序列的分解问题。不同的是, 在这里需要消除噪声所带来的影响, 从而可以采用第 2 节中的基于支撑子空间的 Lloyd-like 迭代算法估计信道参数, 从而恢复信道, 具体步骤见第 2.2 节中基于支撑子空间的 Lloyd-like 迭代算法流程, 只需要将向量 $\hat{\mathbf{s}}$ 换成向量 $\mathbf{h}_{ZF}$ 即可。

3.2 仿真结果

第 2.2 节提出了基于支撑子空间的 Lloyd-like 迭代算法, 且正如第 3.1 节所述, 此算法也可用于解决无线信道中的信道估计问题。因此, 本节将对本文所提算法的估计效果做出仿真图, 衡量标准采用平均估计误差 ε , 其计算式如下。

$$\varepsilon = \frac{\|h - \hat{h}^2\|}{\|h^2\|} \quad (22)$$

信道 h 的构造参数 β_l 与 θ_l ($l=1,2,\dots,r$) 均随机生成, 其中 β_l 服从均值为 0、方差为 1 的复高斯分布, θ_l 是从区间 $(-\pi, \pi)$ 中随机选取的, 且叠加在信道 h 上的噪声服从均值为 0、方差为 1 的复高斯分布。

不同信噪比下的平均估计误差仿真如图 1 所示, 其中, 接收天线 $N=32$, 路径数 $r=6$, 角度的量化点为 2 000, 迭代次数 k 设置为 3, 阈值 Δ 设置为 0.001。从图 1 可以看出, 无论信噪比取多少, 本文所提算法始终优于 Prony-Kung 方法和 ZF 响应信道估计方法, 且随着信噪比的增大, 平均估计误差 ε 不断减小。

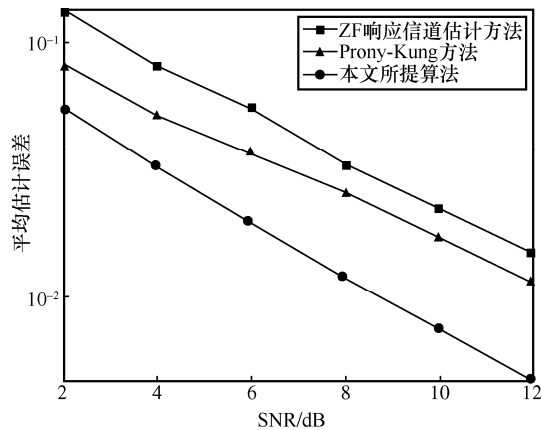


图 1 不同信噪比下的平均估计误差仿真

不同天线数下的平均估计误差仿真如图 2 所示, 其中, 信噪比取 4 dB, 路径数 $r=8$, 角度的量化点为 2 000, 迭代次数 k 设置为 3, 阈值 Δ 设置为 0.001。从图 2 可以看出, 无论天线数 N 取多大, 本文所提算法始终优于 Prony-Kung 方法和 ZF 响应信道估计方法

方法, 且随着天线数的增大, 其平均估计误差不断减小。

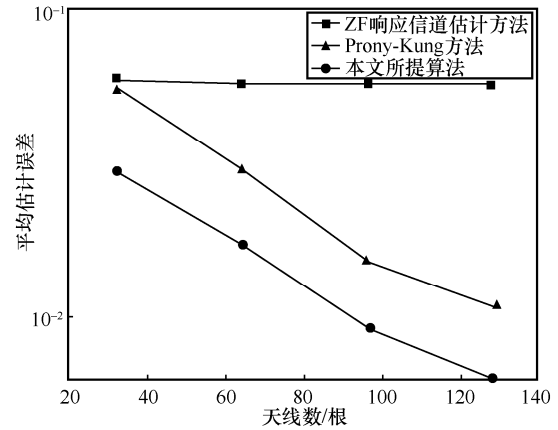


图 2 不同天线数下的平均估计误差仿真

不同路径数下的平均估计误差仿真如图 3 所示, 其中, 信噪比取 4 dB, 天线数 $N=64$, 角度的量化点为 2 000, 迭代次数 k 设置为 3, 阈值 Δ 设置为 0.001。从图 3 可以看出, 无论路径数 r 取多大, 本文所提算法始终优于 Prony-Kung 方法和 ZF 响应信道估计方法。

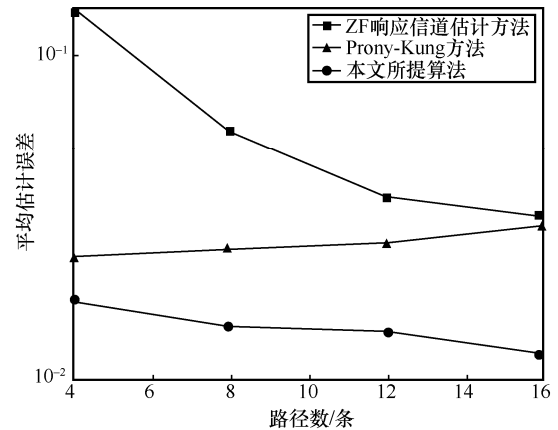


图 3 不同路径数下的平均估计误差仿真

不同迭代次数下的平均估计误差如图 4 所示, 其中, 天线数 $N=64$, 路径数 $r=6$, 角度的量化点为 2 000。从图 4 可以看出, 在低信噪比时, 迭代一次与迭代多次的平均估计误差几乎一致。随着信噪比的增大, 迭代 1 次与迭代 2 次及以上的平均估计误差逐渐拉开差距, 且迭代 2 次与迭代 2 次



以上的平均估计误差几乎一致,相差甚小。因此,基于支撑子空间的 Lloyd-like 迭代算法在实际应用中,只需要迭代 2 次,大大降低了计算复杂度和时间复杂度。

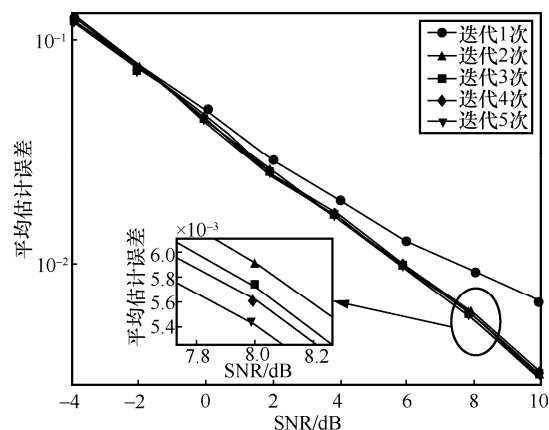


图 4 不同迭代次数下的平均估计误差

不同信噪比下的平均估计误差如图 5 所示,其中,天线数 $N=32$, 路径数 $r=6$, 角度的量化点为 2 000, 迭代次数 k 设置为 3, 阈值 Δ 设置为 0.001。从图 5 可以看出,无论信噪比取高还是低,本文所提算法均优于 ZF 响应信道估计方法、最小均方误差 (minimum mean square error, MMSE) 信道估计方法、压缩感知信道估计方法。在低信噪比的情况下,本文所提算法略优于压缩感知信道估计方法,且随着信噪比的增大,这种优越性变得越来越明显。

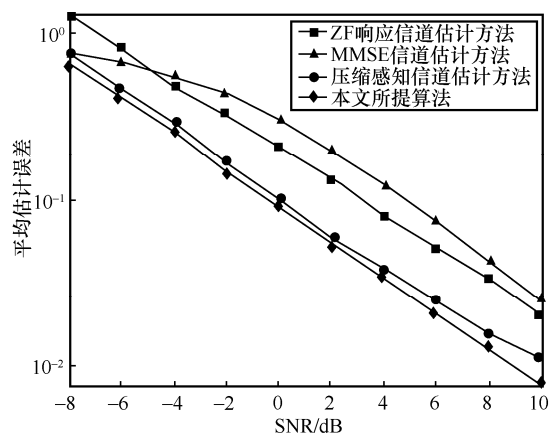


图 5 不同信噪比下的平均估计误差

4 结束语

本文提出的基于支撑子空间的 Lloyd-like 迭代算法在处理噪声污染下的指数和序列分解问题时,无论此指数和序列的构造的大小如何,最终的仿真结果均表明,本文所提出的方法的性能极大地优于 Prony-Kung 方法,而且将此方法应用于实际的毫米波信道信息估计问题时,根据仿真的结果可知,其大大地优于 ZF 响应信道估计方法与 MMSE 信道估计方法,且优于压缩感知信道估计方法。

参考文献:

- [1] FENG K Q, LUO J Q. Value distributions of exponential sums from perfect nonlinear functions and their applications[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(9): 3035-3041.
- [2] ALKHEIR A A, IBNKAHLA M. An accurate approximation of the exponential integral function using a sum of exponentials[J]. IEEE Communications Letters, 2013, 17(7): 1364-1367.
- [3] MOHAMED M A E H. Efficient approximation of photovoltaic model using dependent thevenin equivalent circuit based on exponential sums function[C]//Proceedings of 2015 IEEE 42nd Photovoltaic Specialist Conference (PVSC). Piscataway: IEEE Press, 2015: 1-6.
- [4] JERIČEVIĆ Ž. Fitting sum of exponentials to experimental data: linearization by numerical integration approximation[C]//Proceedings of 2019 42nd International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics (MIPRO). Piscataway: IEEE Press, 2019: 218-221.
- [5] YOSHIZAWA A, UCHIDA S. A discriminant-based RMSE improvement technique for classical prony method in small array radars[C]//Proceedings of 2020 17th European Radar Conference (EuRAD). Piscataway: IEEE Press, 2021: 298-301.
- [6] VANDEVOORDE D. A fast exponential decomposition algorithm and its applications to structured matrices[M]. New York: Rensselaer Polytechnic Institute, 1996.
- [7] KUNG S Y, ARUN K S, BHASKARRAO D V. State-space and singular-value decomposition-based approximation methods for the harmonic retrieval problem[J]. JOSA, 1983, 73(12): 1799-1811.
- [8] FISCHER M, KOSTRZEWA B, OSTMEYER J, et al. On the generalised eigenvalue method and its relation to Prony and generalised pencil of function methods[J]. The European Physical Journal A, 2020, 56(8): 206.
- [9] CAI T T, WANG L. Orthogonal matching pursuit for sparse signal recovery with noise[J]. IEEE Transactions on Informa-

tion Theory, 2011, 57(7): 4680-4688.

- [10] 何世文, 黄永明, 王海明, 等. 毫米波无线通信发展趋势及技术挑战[J]. 电信科学, 2017, 33(6): 11-20.

HE S W, HUANG Y M, WANG H M, et al. Development trend and technological challenges of millimeter-wave wireless communication[J]. Telecommunications Science, 2017, 33(6): 11-20.

- [11] RAGHAVAN V, SAYEED A M. Sublinear capacity scaling laws for sparse MIMO channels[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2011, 57(1): 345-364.

- [12] ALKHATEEB A, EL A O, LEUS G, et al. Channel estimation and hybrid precoding for millimeter wave cellular systems[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2014, 8(5): 831-846.

- [13] 周冬, 曹海燕, 许方敏, 等. 大规模 MIMO 系统中基于权重高斯赛德低复杂度 ZF 预编码方案[J]. 电信科学, 2019, 35(3): 69-75.

ZHOU D, CAO H Y, XU F M, et al. A low complexity ZF precoding scheme based on weighted Gauss-Seidel in massive MIMO systems[J]. Telecommunications Science, 2019, 35(3): 69-75.

[作者简介]



武智炜 (1998-), 男, 杭州电子科技大学通信工程学院硕士生, 主要研究方向为信号与信息处理。



王海泉 (1964-), 男, 博士, 杭州电子科技大学通信工程学院教授、博士生导师, 主要研究方向为无线通信、多天线系统、信号检测、信息论等。



李美慧 (1998-), 女, 杭州电子科技大学通信工程学院硕士生, 主要研究方向为信号与信息处理。



张欣禹 (1997-), 男, 杭州电子科技大学通信工程学院硕士生, 主要研究方向为信号与信息处理。



钱淘鑫 (1998-), 女, 杭州电子科技大学通信工程学院硕士生, 主要研究方向为信号与信息处理。